L3 Sc. Phys. et Chim. Electromagnétisme.

I. Propagation d'une O.P.P.M. dans la matière ($\rho_{au}=0$, $\vec{J}_{au}=\vec{0}$)

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ [5,5 pts]

1. 0,5 pt
$$\begin{cases} \text{rot}\,\underline{\vec{E}_0} - i\omega\,\underline{\vec{B}_0} = 0 & \text{div}\,\underline{\vec{B}_0} = 0 \\ \text{rot}\,\underline{\vec{H}_0} + i\omega\,\underline{\vec{D}_0} = 0 & \text{div}\,\underline{\vec{D}_0} = 0 \end{cases}$$

0,5 pt { où $\underline{\vec{H}_0} = \underline{\vec{B}_0}/\mu_0$; milieu l.h.i. $\underline{\vec{D}_0} = \underline{\varepsilon_r}(\omega)\cdot\varepsilon_0\cdot\underline{\vec{E}_0}$

2. 0,5 pt $\text{rot}\,\underline{\vec{B}_0} + i\dfrac{\omega}{c^2}\cdot\underline{\varepsilon_r}\,\underline{\vec{E}_0} = \vec{0}$

3. 0,5 pt $\text{div}\,\underline{\vec{D}} = \text{div}\left[\underline{\varepsilon_r}(\omega)\cdot\underline{\vec{E}_0}\right] = \underline{\varepsilon_r}(\omega)\cdot\text{div}\,\underline{\vec{E}_0} = 0$
(car l.h.i.)

4. 2 possibilités.

a) $\underline{\varepsilon_r}(\omega) = 0 \Rightarrow \underline{\vec{D}_0} = \vec{0}$

$\text{rot}\,\underline{\vec{B}_0} = \vec{0}$ mais de plus $\text{div}\,\underline{\vec{B}_0} = 0$ donc $\underline{\vec{B}_0} = \vec{0}$

0,5 pt L'onde est purement électrique et $\text{rot}\,\underline{\vec{E}_0} = i\omega\,\underline{\vec{B}_0} = \vec{0}$

0,5 pt soit $\underbrace{i\vec{k}\times\underline{\vec{E}_0}}_{\vec{\text{rot}}\text{ en notation complexe}} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ le champ $\underline{\vec{E}_0}$ est longitudinal $\underline{\vec{E}_0} /\!/ \vec{k}$.

exemples : onde de plasma, vibrations harmoniques longitudinales des ions dans les solides.

0,5 pt b) $\text{div}\,\underline{\vec{E}_0} = 0$ soit $\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}_0} = 0$ $\Rightarrow$ onde transverse.

5. $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}_0}) = \vec{\text{grad}}\,(\underbrace{\text{div}\,\underline{\vec{E}_0}}_{0}) - \Delta\underline{\vec{E}_0}$

M.F. ↓

$\vec{\text{rot}}\,(i\omega\underline{\vec{B}_0}) = i\omega\,\underbrace{\text{rot}\,\underline{\vec{B}_0}}_{\text{MA}} = i\omega\left(-\dfrac{i\omega}{c^2}\underline{\varepsilon_r}\,\underline{\vec{E}_0}\right)$

1 pt $\Rightarrow$ $\Delta\underline{\vec{E}_0} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\cdot\underline{\varepsilon_r}\cdot\underline{\vec{E}_0} = \vec{0}$ et la même relation pour $\underline{\vec{B}_0}$.
Equation d'onde

Solutions avec vecteur d'onde complexe : $\underline{\vec{E}_0} = \underline{\vec{E}_m}\, e^{i\underline{\vec{k}}\cdot\vec{r}}$

$\Delta\underline{\vec{E}_0} = -\underline{k}^2\cdot\underline{\vec{E}_0} \Rightarrow -\underline{k}^2\cdot\underline{\vec{E}_m} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r}\cdot\underbrace{\underline{\vec{E}_m}}_{\text{choisi réel}} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Relation de dispersion :

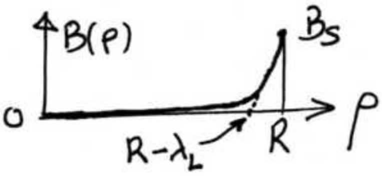
1 pt $$\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r}(\omega) = 0$$

L3 Sciences Physiques et Chimiques. Électromagn. de la matière.

II.1) Invariance selon φ et $z \Rightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$

$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{B}{\lambda_L}$ et $\frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2} = \frac{B}{\lambda_L^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} = \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{1}{\rho\lambda_L}\right)\vec{B}$ mais $\rho \gg \lambda_L$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho\lambda_L} \ll \frac{1}{\lambda_L^2}$.



2) λ_L = épaisseur de London = épaisseur de la couche où $B \neq 0$.

3) $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{B_z} = -\frac{\partial B}{\partial \rho} \cdot \vec{e_\varphi} = -\frac{B_s}{\lambda_L} \cdot \exp -\left(\frac{R-\rho}{\lambda_L}\right) \cdot \vec{e_\varphi} \equiv -\mu_0 J_{Max} \exp -\left(\frac{R-\rho}{\lambda_L}\right) \vec{e_\varphi}$

en posant $J_{Max} = \frac{1}{\lambda_L} \cdot \frac{B_s}{\mu_0}$.

4) $J_S = \int_0^R J(\rho) \cdot d\rho = \lambda_L \left[J(\rho)\right]_0^R = -\lambda_L \cdot J_{Max}\, e^{-\frac{R}{\lambda_L}}\left[e^{\frac{R}{\lambda_L}} - 1\right] \simeq -\lambda_L \cdot J_{Max}$

Tout se passe comme si une nappe de courant d'épaisseur très faible devant R ($\lambda_L \ll R$) circulait dans le sens $-\vec{e_\varphi}$.

Or un solénoïde parcouru par un courant surfacique $J_S = n\,I$ (en A/m) crée un champ à l'intérieur :

$\vec{B}_{sol} = \vec{B}_m = \mu_0 J_S\, \vec{e_z} = -\mu_0 \cdot \lambda_L J_{Max}\, \vec{e_z}$

5) Loin de la surface extérieure du cylindre (à plusieurs λ_L) on a $\vec{B} = \vec{B_a} + \vec{B_m} \simeq \vec{0} \Rightarrow \vec{B_m} = -\vec{B_a}$

et $B_a = B_m = \mu_0 \lambda_L J_{Max}$. La nappe de courant $\vec{J_S}$ est donc la réponse du milieu à $\vec{B_a}$ qui annule le champ magnétique total $\vec{B}$ dans le volume du matériau supra.

6) Diamagnétisme car $\vec{B_m}$ induit opposé à $\vec{B_a}$.

7) a) $dI = J_S \cdot dz = -\frac{B_a}{\mu_0} \cdot dz$

b) $d\vec{M} = (dI) \cdot (\pi R^2) \cdot \vec{e_z} = -\frac{B_a}{\mu_0} \cdot \underbrace{(dz \cdot \pi R^2)}_{dv}\, \vec{e_z}$

c) $\frac{d\vec{M}}{dv} = -\frac{\vec{B_a}}{\mu_0}$.